**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

**СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ**

**1.Элементы комбинаторики.**

Пусть задано некоторое множество , состоящее из элементов.

**Определение 1.1.** *Перестановкой* изэлементов называется всякий упорядоченный набор, состоящий из всех элементов множества .

**Пример 1.1.** Турнирная таблица Чемпионата России по футболу представляет собой перестановку из 16 элементов.

**Теорема 1.1.** Если – число всех возможных перестановок из элементов, то

. (1.1)

*Доказательство.* Действительно, на первое место возможно выбрать элемент способами; если на первое место элемент уже выбран, то на второе место можно выбрать элемент способами и т.д.

**Определение 1.2.** *Размещением* изэлементов по , kназывается всякий упорядоченный набор, состоящий из различных элементов множества .

**Замечание 1.1.** При k размещение превращается в перестановку.

**Пример 1.2.** Тройка призёров Чемпионата России по футболу представляет собой размещение из 16 элементов по 3.

**Теорема 1.2.** Если – число всех возможных размещений из элементов по , то

. (1.2)

*Доказательство.* Действительно, на первое место возможно выбрать элемент способами; если на первое место элемент уже выбран, то на второе место можно выбрать элемент способами и т.д., на -тое место можно выбрать элемент способами. Тогда

*.*

**Определение 1.3.** *Размещением с повторениями* изэлементов по называется всякий упорядоченный набор, состоящий из элементов множества , среди которых могут быть и повторяющиеся.

**Замечание 1.2.** В определении 1.3 может быть и больше

**Пример 1.3.** Четырёхзначный цифровой код, в котором есть повторяющиеся цифры, является размещением с повторениями из 10 элементов по 4.

**Пример 1.4.** Двенадцатизначный цифровой код является размещением с повторениями из 10 элементов по 12.

**Теорема 1.3.** Если – число всех возможных размещений с повторениями из элементов по , то

. (1,3)

*Доказательство* теоремы очевидно.

**Определение 1.4.** *Сочетанием* изэлементов по , kназывается всякий неупорядоченный набор, состоящий из различных элементов множества .

**Пример 1.5.** Четвёрка дежурных, назначенных из группы в 25 человек, является сочетанием из 25 по 4.

**Теорема 1.4.** Если – число всех возможных сочетаний из элементов по , то

. (1.4)

*Доказательство.* Поскольку по определению сочетание – это неупорядоченный набор, то отождествляются всевозможные размещения из элементов по , состоящие из одних и тех же элементов, отличающиеся только порядком. Тогда

.

Понятие сочетания и формула (1.4) будет часто использоваться в курсе теории вероятностей.

Для полноты изложения приведём ещё одно определение и теорему.

**Определение 1.5.** *Сочетанием с повторениями* изэлементов по называется всякий неупорядоченный набор, состоящий из элементов множества , среди которых могут быть и повторяющиеся.

**Пример 1.6.** Победители конкурса в номинациях при участниках являются примером сочетания с повторениями из элементов по .

**Теорема 1.5.** Если – число всех возможных сочетаний с повторениями из элементов по , то

. (1.5)

Доказательство этой теоремы опустим.

**2.Случайные события. Поле элементарных событий. Алгебра событий.**

Предметом изучения теории вероятностей являются так называемые *случайные события.*

**Определение 2.1.** *Случайным событием* называется такое событие, появление которого в результате эксперимента предсказать невозможно в силу сложности множества влияющих факторов.

**Определение 2.2.** *Полем элементарных событий* называется множество всех возможных взаимоисключающих результатов эксперимента. А сами эти элементарные события называются исходами эксперимента; при этом они предполагаются равновозможными.

. Поле элементарных событий может состоять как из конечного числа исходов, так и из бесконечного числа исходов. Если поле элементарных событий состоит из исходов, то принято писать где - элементарные исходы.

**Определение 2.3.** *Составным событием* называется событие, состоящее из нескольких исходов (возможно, из бесконечного числа исходов).

События принято обозначать заглавными латинскими буквами , возможно, с индексами.

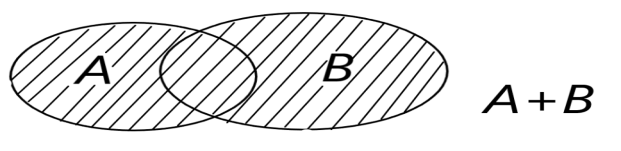
**Определение 2.4.** *Невозможным событием* называется событие, которое не может появиться в результате эксперимента, или, иными словами, событие, не содержащее ни одного исхода. Невозможное событие принято обозначать

**Определение 2.5.** *Достоверным событием* называется событие, которое обязательно появится в результате эксперимента, или, иными словами, событие, совпадающее с полем элементарных событий .

**Определение 2.6.** Событием, *противоположным* событию , называется событие, состоящее в том, что в результате эксперимента событие не появится, или, иными словами, событие, состоящее из всех тех исходов, которые не входят в событие

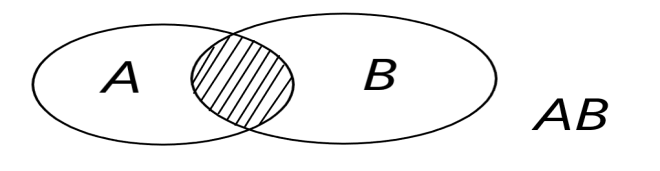
Очевидно, что , ,

**Определение 2.7.** Суммой событий называется событие, состоящее в том, что в результате эксперимента появится хотя бы одно из складываемых событий, или, иными словами, событие, состоящее из всех элементарных исходов, входящих хотя бы в одно из складываемых событий.



**Замечание 2.1.** Аналогичным образом определяется сумма любого числа событий.

**Определение 2.8.** Произведением событий называется событие, состоящее в том, что в результате эксперимента появятся оба перемножаемых события, или, иными словами, событие, состоящее из всех тех элементарных исходов, которые входят в оба перемножаемых события.



**Замечание 2.2.** Аналогичным образом определяется произведение любого числа событий.

Определения и свойства суммы и произведения событий аналогичны определениям и свойствам объединения и пересечения множеств, а также определениям и свойствам дизъюнкции и конъюнкции. А именно, легко проверяются следующие свойства суммы и произведения событий:

**Пример 2.1.** Пусть бросается игральная кость. Тогда поле элементарных событий состоит из шести исходов: . Здесь через сокращенно обозначен исход . Пусть ,

, ,

**3. Классическое определение вероятности.**

**Определение 3.1.** Пусть поле элементарных событий состоит из конечного числа исходов , а событие состоит из исходов. Тогда классической *вероятностью появления события* называется число .

Очевидно, что , , .

Рассмотрим несколько задач на непосредственное вычисление вероятностей.

**Пример 3.1.** Пусть бросается монета. Найти вероятность появления герба.

*Решение.* Число всех исходов . Число исходов, благоприятствующих появлению герба, .

**Пример 3.2.** В урне 5 белых и 4 чёрных шара. Найти вероятность того, что три наудачу извлечённых шара окажутся белыми.

*Решение.* Всего в урне 9 шаров. Число всех возможных исходов равно числу сочетаний из 9 по 3: Число исходов , благоприятствующих появлению события , равно числу сочетаний из 5 по 3: Тогда .

**Пример 3.3.** В урне 5 белых и 4 чёрных шара. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу извлечённых шаров три окажутся белыми, а два - черными.

*Решение.* Всего в урне 9 шаров. Число всех возможных исходов равно числу сочетаний из 9 по 5: Нетрудно понять, что число исходов , благоприятствующих появлению события , равно . Тогда

.

**4.Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече.**

Напомним, что классическое определение вероятности было дано при условии, что поле элементарных событий состоит из конечного числа исходов. Приведём геометрическое определение вероятности, которое не предполагает конечности числа исходов.

**Определение 4.1.** Пусть случайным образом выбирается точка интервала . Тогда вероятность того, что , где , определяется равенством , где

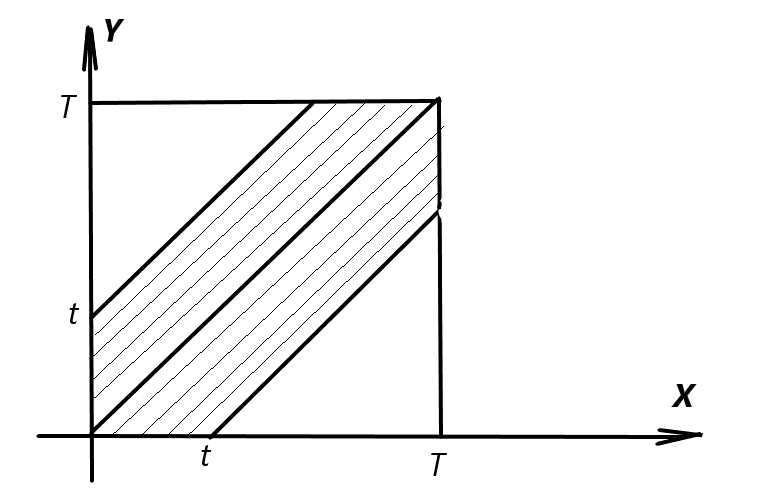
**Определение 4.2.** Пусть , . Тогда вероятность того, что случайным образом выбранная точка множества будет принадлежать множеству , определяется равенством , где – соответственно площади множеств и

**Определение 4.3.** Пусть , . Тогда вероятность того, что случайным образом выбранная точка множества будет принадлежать множеству , определяется равенством , где – соответственно объёмы множеств и

Для геометрической вероятности справедливы все те свойства, которые были приведены для классической вероятности.

**Пример 4.1. (Задача о встрече).** Пусть два приятеля – - договорились встретитьсяв течение некоторого промежутка времени длительностью Причём условились, что пришедший первым будет ждать второго не более промежутка времени длительностью Какова вероятность того, что встреча состоится в течение условленного времени если для каждого из друзей все возможные моменты прихода из промежутка времени считать равновозможными.

*Решение.* Введём декартовы координаты c началом координат в точке отсчёта начала промежутка времени .



Обозначим момент прихода в условленное место через , а - через .

Тогда всем возможным исходам соответствуют точки квадрата

. Встреча состоится, если Следовательно, исходам, благоприятствующим встрече, соответствуют точки заштрихованной на рисунке фигуры, которая ограничена прямыми

*.*

Площадь всего квадрата равна . Площадь заштрихованной фигуры равна площади квадрата без площадей двух незаштрихованных равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами длины :

.

Тогда .

**5.Статистическая вероятность.**

**Определение 5.1.** Пусть проводится испытаний и при этом событие наблюдается раз. Тогда называется *относительной частотой* появления события

**Определение 5.2.** Относительная частота появления события называется *статистической вероятностью* появления события .

Статистическая вероятность является *апостериорным* (послеопытным) понятием в отличие от классической вероятности, которая является *априорным* (доопытным) понятием.

Ниже будет доказано, что при больших в каком-то смысле статистическая вероятность приближает классическую вероятность.

**Пример 5.1.** Пусть стрелок производит 100 выстрелов по мишени и при этом 70 раз поражает мишень. Тогда статистическая вероятность равна .

**6. Формулы сложения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события из группы совместных событий.**

**Определение 6.1.** События называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно, то есть, если у них нет общих исходов.

Очевидно, события несовместны тогда и только тогда, когда .

В частности, события и несовместны.

**Определение 6.2.** События называются *совместными*, если они могут произойти одновременно, то есть, если у них есть общие исходы.

**Теорема 6.1.** Пусть события несовместны. Тогда

. (6.1)

*Доказательство.* Пусть поле элементарных событий состоит из исходов, событие состоит из , а событие состоит из . Поскольку события не имеют общих исходов, то событие состоит из исходов. Тогда

.

Совершенно так же доказывается

**Теорема 6.2.** Пусть события попарно несовместны. Тогда

. (6.2)

**Замечание 6.1.** Поскольку события и несовместны, +,

, то

*.* (6.3)

Из (6.3) получим:

(6.4)

**Теорема 6.3.** Пусть события совместны. Тогда

. (6.5)

*Доказательство.* Пусть поле элементарных событий состоит из исходов, событие состоит из , событие состоит из , а событие состоит из исходов. Поскольку события имеют общие исходы, то событие состоит из исходов. Тогда

.

Напомним, что событие, состоящее в появлении одного события из группы событий -это суммаЕсли эти события попарно несовместны, то вероятность суммы вычисляется по формуле (6.2).

Вероятность суммы двух совместных событий вычисляется по формуле (6.5). Как же быть, если совместных слагаемых больше двух?

Заметим, что событием, противоположным появлению хотя бы одного из группы событий является событие, состоящее в том, что ни одно из этих событий не появится. То есть,

*.* (6.6)

Равенство (6.6) является аналогом правила Де Моргана из теории логических функций.

Но тогда из (6.4) и (6.6) получим:

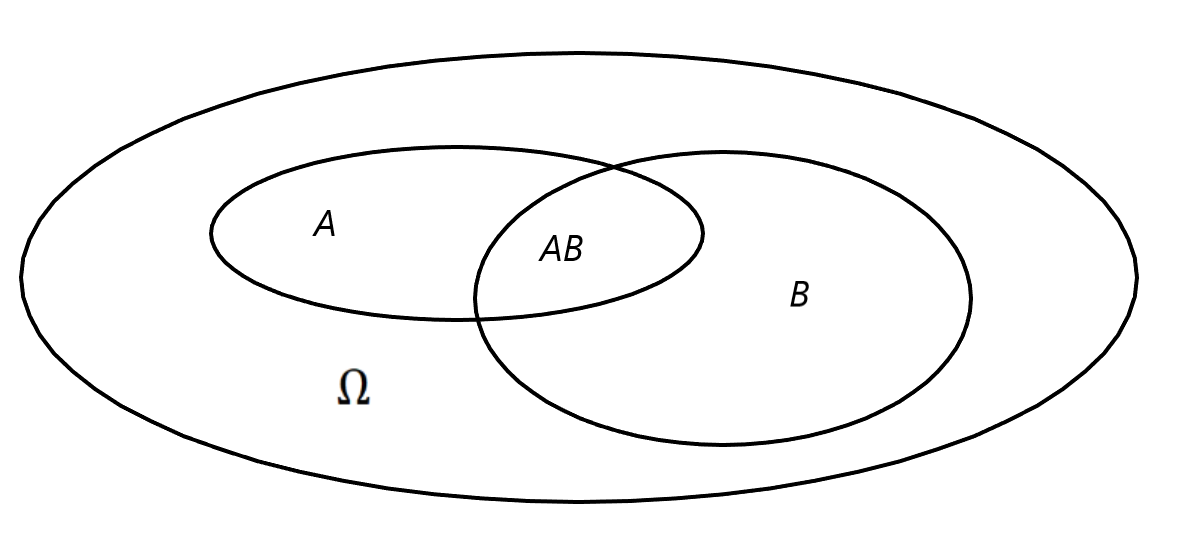
(6.7)

**7. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей. Зависимые и независимые события.**

**Определение 7.1.** *Условной вероятностью* (– читается называется вероятность появления события при условии, что известно, что событие произошло.

**Замечание 7.1.** По сути дела, это означает, что поле элементарных событий сужено до множества .

.



Заметим, что для условной вероятности ещё употребляется следующее обозначение:

Для условной вероятности справедливы все свойства вероятности.

**Теорема 7.1.** .

*Доказательство.* Пусть поле элементарных событий состоит из исходов, событие состоит из исходов, а событие состоит из исходов. Тогда в силу замечания 7.1 получим: . Разделив числитель и знаменатель этой дроби на , получим утверждение теоремы.

**Следствие 7.1.** Из теоремы 7.1 очевидным образом следует *формула умножения вероятностей*:

(7.1)

Из (7.1) легко можно получить формулу умножения вероятностей для произведения событий:

(7.2)

**Определение 7.2.** Событие называется *независимым* от события , если

. (7.3)

В противном случае событие называется *зависимым* от события .

**Теорема 7.2 (О взаимной независимости событий).** Если событие не зависит от события , то и событие не зависит от события

*Доказательство.* С одной стороны в силу независимости события от события

. Но тогда , откуда при условии следует, что , что означает, что событие не зависит от события

Таким образом, в силу теоремы 7.2 можно просто говорить, что события и независимы.

**Замечание 7.1**. Если события и несовместны и , то они зависимы.

Действительно, в случае несовместности событий

Для независимых событий формула сложения вероятностей совместных событий (6.5) примет вид:

(7.4)

**Определение 7.3.** События называются *независимыми в совокупности*, если они попарно независимы, а также каждое из них независимо со всевозможными произведениями остальных.

В частности, события называются независимыми в совокупности, если независимы события

Покажем, что из попарной независимости не следует независимость в совокупности.

**Пример 7.1.** Пусть в урне находится один белый шар, один синий, один красный и один шар, окрашенный в белый, синий и красный цвета.

Введём события:

, ,

.

Очевидно, , поскольку каждый из трёх цветов имеют по два шара из четырёх. , поскольку то, что произошло событие , означает, что извлечён либо целиком синий шар, либо разноцветный. А из этих двух шаров белый цвет имеет только разноцветный. Аналогичным образом .

Следовательно, события попарно независимы.

Но поскольку означает, что извлечённый шар имеет синий и красный цвета, а он имеет и белый цвет. Следовательно, события не являются независимыми в совокупности.

Если события являются независимыми в совокупности, то из (7.2) получим:

. (7.5)

Если события являются независимыми, то можно доказать, что противоположные им события тоже являются независимыми.

Тогда формула (6.7) вероятности появления хотя бы одного из группы совместных событий при условии независимости этих событий примет вид:

,

Или, ещё подробнее,

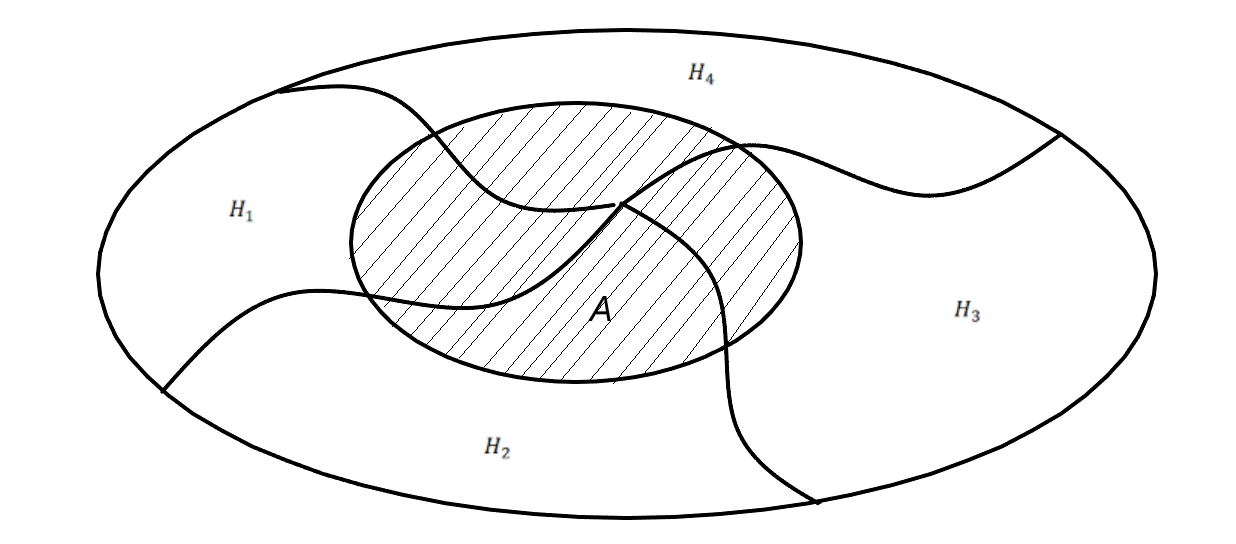
(7.6)

**8. Формула полной вероятности и формула Байеса.**

**Определение 8.1.** Говорят, что события составляют *полную группу событий*, если они попарно несовместны и их сумма равна всему полю элементарных событий, то есть при , .

Очевидно, что

Часто бывает, что событие может появиться только с одним из событий составляющих полную группу событий (в этом случае события называются *гипотезами*).



Тогда вероятность появления события может быть вычислена по так называемой *формуле полной вероятности*:

. (8.1)

Докажем формулу (8.1).

Очевидно, что . Поскольку события несовместны, то несовместны и события . Но тогда по формуле сложения вероятностей для несовместных событий (6.2) и формуле умножения вероятностей (7.1) получим:

*.*

Выведем теперь формулу Байеса.

После того, как событие произошло, можно пересчитать вероятность гипотез, то есть вычислить условные вероятности ,

По формуле умножения вероятностей имеем: =. Но с другой стороны =. Тогда

, откуда , и в силу формулы полной вероятности получим:

, (8.2)

Это и есть формула Байеса.

**Пример 8.1.** Пусть в первой урне находятся два белых и три чёрных шара, а во второй – четыре белых и пять чёрных шара. Из первой урны переложили во вторую один шар. После чего из второй урны извлекли один шар.

1. Найти вероятность того, что извлечённый из второй урны шар оказался белым.
2. Извлечённый из второй урны шар оказался белым. Найти вероятность того, что переложенный из первой урны во вторую шар был чёрным.

*Решение.* Введём гипотезы: .

Введём событие: .

Тогда, очевидно, , , , .

Следовательно:

1. .
2. .

**9. Повторение испытаний. Формула Бернулли.**

**Теорема 9.1.** Пусть проводится независимых испытаний и при каждом испытании вероятность появления события одна и та же и равна (эти условия называются схемой Бернулли). Пусть - вероятность появления события раз при испытаниях. Тогда

, . (9.1)

Формула (9.1) называется формулой Бернулли.

*Доказательство.* Для наглядности докажем сначала теорему при =3 и =2.

Обозначим через появление события при - том испытании, через – появление события раз при испытаниях.

Для наглядности докажем сначала теорему при =3 и =2.

Очевидно, . Поскольку слагаемые в этом равенстве несовместны, а в каждом слагаемом сомножители независимы, то

=.

Для произвольных и событие представляет собой сумму, каждое из слагаемых которого является произведением различных сомножителей и сомножителей, являющихся событиями, противоположными остальным событиям (например, одно из слагаемых - ). Вероятность появления каждого из этих несовместных слагаемых равна , причём таких слагаемых .

**Пример 9.1.** Пусть пять раз бросается игральная кость. Какова вероятность того, что 1 выпадет три раза.

*Решение.* Вероятность выпадения 1 при каждом бросании равна , Тогда

==.

Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями:

– вероятность того, что при испытаниях событие появится менее раз;

– вероятность того, что при испытаниях событие появится не более раз;

– вероятность того, что при испытаниях событие появится более раз;

– вероятность того, что при испытаниях событие появится не менее раз.

Очевидно,

;

.

**10. Формула Пуассона.**

При очень больших пользоваться формулой Бернулли неудобно, поскольку вычислять факториалы трудоёмко. В этом случае пользуются приближёнными формулами.

**Теорема 10.1.** Пусть выполнены условия схемы Бернулли, причём число испытаний очень велико, а вероятность появления события в каждом испытании ничтожно мала. Тогда вероятность появления события раз при испытаниях приближённо вычисляется по формуле Пуассона

, где . (10.1)

*Доказательство.* Преобразуем формулу Бернулли (9.1):

=

*.*  (10.2)

Поскольку *,*  (второй замечательный предел), то из (10.2) получим

**Пример 10.1.** Магазин получил 3000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита равна 0,001. Найти вероятность того, что при перевозке будет разбито: а) две бутылки; б) не более двух бутылок; в) более двух бутылок.

*Решение.* Имеем: , 3. Тогда:

а) =;

б) =(1+3+

(напомним, что );

в) Заметим, что события являются взаимно противоположными событиями, поэтому .

Значение можно взять из таблицы.

**11. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.**

В предыдущем пункте было рассмотрено приближение формулы Бернулли формулой Пуассона при условии, что число испытаний очень велико, а вероятность появления события при каждом испытании ничтожно мала. В этом пункте будет приведено приближение формулы Бернулли при условии, что число испытаний велико, а вероятность появления события при каждом испытании не мала.

Но сначала необходимо привести некоторые вспомогательные определения и утверждения.

Справедливо следующее равенство:

(11.1)

Интеграл из левой части равенства (11.1) называется *интегралом Пуассона.* Первообразную подынтегральной функции найти невозможно, но вычислить этот несобственный интеграл возможно. Мы доказательство равенства (11.1) приводить не будем.

В силу чётности подынтегральной функции очевидно, что

*.*  (11.2)

**Определение 11.1.** *Локальной функцией Лапласа* называется функция

(11.3)

**Определение 11.2.** *Интегральной функцией Лапласа* называется функция

. (11.4)

В каждом пособии по теории вероятностей есть таблицы локальной и интегральной функций Лапласа.

Поскольку функция является чётной, то в таблице приведены значения функции только для положительных значений аргумента, причём только для , так как функция быстро убывает, и при она считается равной нулю.

В силу равенства (11.2) , причём, поскольку подынтегральная функция является положительной, то монотонно возрастает. Кроме того, функция является нечётной, поэтому в таблице приведены значения функции только для положительных ; для отрицательных значений её значения вычисляются по нечётности: Причём, поскольку , то для функция считается равной 0,5.

**Таблица значений локальной функции Лапласа.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0,0** | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| **0,1** | 0,3970 | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| **0,2** | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| **0,3** | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3726 | 0,3712 | 0,3698 |
| **0,4** | 0,3683 | 0,3668 | 0,3652 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| **0,5** | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| **0,6** | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| **0,7** | 0,3123 | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| **0,8** | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| **0,9** | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1,0** | 0,2420 | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| **1,1** | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| **1,2** | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| **1,3** | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| **1,4** | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| **1,5** | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| **1,6** | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| **1,7** | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| **1,8** | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| **1,9** | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **2,0** | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| **2,1** | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0395 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| **2,2** | 0,0353 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| **2,3** | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| **2,4** | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| **2,5** | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| **2,6** | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| **2,7** | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| **2,8** | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| **2,9** | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **3,0** | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| **3,1** | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| **3,2** | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| **3,3** | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| **3,4** | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| **3,5** | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| **3,6** | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| **3,7** | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| **3,8** | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| **3,9** | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 |

**Таблица значений интегральной функции Лапласа**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **Ф(х)** | **x** | **Ф(х)** | **x** | **Ф(х)** | **x** | **Ф(х)** | **x** | **Ф(х)** | **x** | **Ф(х)** |
| **0,00** | 0,0000 | **0,50** | 0,1915 | **1,00** | 0,3413 | **1,50** | 0,4332 | **2,00** | 0,4772 | **3,00** | 0,49865 |
| **0,01** | 0,0040 | **0,51** | 0,1950 | **1,01** | 0,3438 | **1,51** | 0,4345 | **2,02** | 0,4783 | **3,20** | 0,49931 |
| **0,02** | 0,0080 | **0,52** | 0,1985 | **1,02** | 0,3461 | **1,52** | 0,4357 | **2,04** | 0,4793 | **3,40** | 0,49966 |
| **0,03** | 0,0120 | **0,53** | 0,2019 | **1,03** | 0,3485 | **1,53** | 0,4370 | **2,06** | 0,4803 | **3,60** | 0,499841 |
| **0,04** | 0,0160 | **0,54** | 0,2054 | **1,04** | 0,3508 | **1,54** | 0,4382 | **2,08** | 0,4812 | **3,80** | 0,499928 |
| **0,05** | 0,0199 | **0,55** | 0,2088 | **1,05** | 0,3531 | **1,55** | 0,4394 | **2,10** | 0,4821 | **4,00** | 0,499968 |
| **0,06** | 0,0239 | **0,56** | 0,2123 | **1,06** | 0,3554 | **1,56** | 0,4406 | **2,12** | 0,4830 | **4,50** | 0,499997 |
| **0,07** | 0,0279 | **0,57** | 0,2157 | **1,07** | 0,3577 | **1,57** | 0,4418 | **2,14** | 0,4838 | **5,00** | 0,499997 |
| **0,08** | 0,0319 | **0,58** | 0,2190 | **1,08** | 0,3599 | **1,58** | 0,4429 | **2,16** | 0,4846 |  |  |
| **0,09** | 0,0359 | **0,59** | 0,2224 | **1,09** | 0,3621 | **1,59** | 0,4441 | **2,18** | 0,4854 |  |  |
| **0,10** | 0,0398 | **0,60** | 0,2257 | **1,10** | 0,3643 | **1,60** | 0,4452 | **2,20** | 0,4861 |  |  |
| **0,11** | 0,0438 | **0,61** | 0,2291 | **1,11** | 0,3665 | **1,61** | 0,4463 | **2,22** | 0,4868 |  |  |
| **0,12** | 0,0478 | **0,62** | 0,2324 | **1,12** | 0,3686 | **1,62** | 0,4474 | **2,24** | 0,4875 |  |  |
| **0,13** | 0,0517 | **0,63** | 0,2357 | **1,13** | 0,3708 | **1,63** | 0,4484 | **2,26** | 0,4881 |  |  |
| **0,14** | 0,0557 | **0,64** | 0,2389 | **1,14** | 0,3729 | **1,64** | 0,4495 | **2,28** | 0,4887 |  |  |
| **0,15** | 0,0596 | **0,65** | 0,2422 | **1,15** | 0,3749 | **1,65** | 0,4505 | **2,30** | 0,4893 |  |  |
| **0,16** | 0,0636 | **0,66** | 0,2454 | **1,16** | 0,3770 | **1,66** | 0,4515 | **2,32** | 0,4898 |  |  |
| **0,17** | 0,0675 | **0,67** | 0,2486 | **1,17** | 0,3790 | **1,67** | 0,4525 | **2,34** | 0,4904 |  |  |
| **0,18** | 0,0714 | **0,68** | 0,2517 | **1,18** | 0,3810 | **1,68** | 0,4535 | **2,36** | 0,4909 |  |  |
| **0,19** | 0,0753 | **0,69** | 0,2549 | **1,19** | 0,3830 | **1,69** | 0,4545 | **2,38** | 0,4913 |  |  |
| **0,20** | 0,0793 | **0,70** | 0,2580 | **1,20** | 0,3849 | **1,70** | 0,4554 | **2,40** | 0,4918 |  |  |
| **0,21** | 0,0832 | **0,71** | 0,2611 | **1,21** | 0,3869 | **1,71** | 0,4564 | **2,42** | 0,4922 |  |  |
| **0,22** | 0,0871 | **0,72** | 0,2642 | **1,22** | 0,3883 | **1,72** | 0,4573 | **2,44** | 0,4927 |  |  |
| **0,23** | 0,0910 | **0,73** | 0,2673 | **1,23** | 0,3907 | **1,73** | 0,4582 | **2,46** | 0,4931 |  |  |
| **0,24** | 0,0948 | **0,74** | 0,2703 | **1,24** | 0,3925 | **1,74** | 0,4591 | **2,48** | 0,4934 |  |  |
| **0,25** | 0,0987 | **0,75** | 0,2734 | **1,25** | 0,3944 | **1,75** | 0,4599 | **2,50** | 0,4938 |  |  |
| **0,26** | 0,1026 | **0,76** | 0,2764 | **1,26** | 0,3962 | **1,76** | 0,4608 | **2,52** | 0,4941 |  |  |
| **0,27** | 0,1064 | **0,77** | 0,2794 | **1,27** | 0,3980 | **1,77** | 0,4616 | **2,54** | 0,4945 |  |  |
| **0,28** | 0,1103 | **0,78** | 0,2823 | **1,28** | 0,3997 | **1,78** | 0,4625 | **2,56** | 0,4948 |  |  |
| **0,29** | 0,1141 | **0,79** | 0,2852 | **1,29** | 0,4015 | **1,79** | 0,4633 | **2,58** | 0,4951 |  |  |
| **0,30** | 0,1179 | **0,80** | 0,2881 | **1,30** | 0,4032 | **1,80** | 0,4641 | **2,60** | 0,4953 |  |  |
| **0,31** | 0,1217 | **0,81** | 0,2910 | **1,31** | 0,4049 | **1,81** | 0,4649 | **2,62** | 0,4956 |  |  |
| **0,32** | 0,1255 | **0,82** | 0,2939 | **1,32** | 0,4066 | **1,82** | 0,4656 | **2,64** | 0,4959 |  |  |
| **0,33** | 0,1293 | **0,83** | 0,2967 | **1,33** | 0,4082 | **1,83** | 0,4664 | **2,66** | 0,4961 |  |  |
| **0,34** | 0,1331 | **0,84** | 0,2995 | **1,34** | 0,4099 | **1,84** | 0,4671 | **2,68** | 0,4963 |  |  |
| **0,35** | 0,1368 | **0,85** | 0,3023 | **1,35** | 0,4115 | **1,85** | 0,4678 | **2,70** | 0,4965 |  |  |
| **0,36** | 0,1406 | **0,86** | 0,3051 | **1,36** | 0,4131 | **1,86** | 0,4686 | **2,72** | 0,4967 |  |  |
| **0,37** | 0,1443 | **0,87** | 0,3078 | **1,37** | 0,4147 | **1,87** | 0,4693 | **2,74** | 0,4969 |  |  |
| **0,38** | 0,1480 | **0,88** | 0,3106 | **1,38** | 0,4162 | **1,88** | 0,4699 | **2,76** | 0,4971 |  |  |
| **0,39** | 0,1517 | **0,89** | 0,3133 | **1,39** | 0,4177 | **1,89** | 0,4706 | **2,78** | 0,4973 |  |  |
| **0,40** | 0,1554 | **0,90** | 0,3159 | **1,40** | 0,4192 | **1,90** | 0,4713 | **2,80** | 0,4974 |  |  |
| **0,41** | 0,1591 | **0,91** | 0,3186 | **1,41** | 0,4207 | **1,91** | 0,4719 | **2,82** | 0,4976 |  |  |
| **0,42** | 0,1628 | **0,92** | 0,3212 | **1,42** | 0,4222 | **1,92** | 0,4726 | **2,84** | 0,4977 |  |  |
| **0,43** | 0,1664 | **0,93** | 0,3238 | **1,43** | 0,4236 | **1,93** | 0,4732 | **2,86** | 0,4979 |  |  |
| **0,44** | 0,1700 | **0,94** | 0,3264 | **1,44** | 0,4251 | **1,94** | 0,4738 | **2,88** | 0,4980 |  |  |
| **0,45** | 0,1736 | **0,95** | 0,3289 | **1,45** | 0,4265 | **1,95** | 0,4744 | **2,90** | 0,4981 |  |  |
| **0,46** | 0,1772 | **0,96** | 0,3315 | **1,46** | 0,4279 | **1,96** | 0,4750 | **2,92** | 0,4982 |  |  |
| **0,47** | 0,1808 | **0,97** | 0,3340 | **1,47** | 0,4292 | **1,97** | 0,4756 | **2,94** | 0,4984 |  |  |
| **0,48** | 0,1844 | **0,98** | 0,3365 | **1,48** | 0,4306 | **1,98** | 0,4761 | **2,96** | 0,4985 |  |  |
| **0,49** | 0,1879 | **0,99** | 0,3389 | **1,49** | 0,4319 | **1,99** | 0,4767 | **2,98** | 0,4986 |  |  |

**Теорема 11.1 (Локальная теорема Лапласа).** Пустьвыполнены условия схемы Бернулли, причём число испытаний очень велико, а вероятность появления события в каждом испытании не мала. Тогда вероятность появления события раз при испытаниях приближённо вычисляется по формуле

, . (11.5)

Эту теорему, так же как и следующую, оставим без доказательства.

Обозначим через вероятность того, что при испытаниях событие появится не менее, чем раз и не более, чем раз.

**Теорема 11.2. (Интегральная теорема Лапласа).** Пусть выполнены условия схемы Бернулли, причём число испытаний очень велико, а вероятность появления события в каждом испытании не мала. Тогда

, где , , (11.6)

**Пример 11.1.** Стрелок производит 100 выстрелов по мишени. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) 72 раза; б) не менее 64 раз и не более 72 раз.

*Решение.* а)Имеем: Тогда

По формуле (11.5)

б) Имеем: , Тогда по формуле (11.6) получим: =0,022762.

**12. Отклонение относительной частоты появления события от вероятности при повторении испытаний.**

Пусть в условиях предыдущего пункта при проведении испытаний событие появилось раз. Выясним, какова вероятность справедливости неравенства , то есть отклонения относительной частоты от вероятности появления события при одном испытании не более, чем на заданную величину

Очевидно, неравенство равносильно неравенству . Положим , (будем считать, что - натуральные числа).Тогда из (11.6) получим:

,

Откуда в силу нечётности функции окончательно получим:

(12.1)

В силу свойств интегральной функции Лапласа из формулы (12.1) следует, что для любого фиксированного при неограниченном увеличении числа испытаний вероятность стремится к единице.

**13. Решение типовых задач.**

В этом пункте разберём ряд задач в дополнение к задачам, рассмотренным выше.

**Пример 13.1.**Три баскетболиста производят по одному броску по кольцу. Вероятности попадания у каждого из них соответственно равны 0,6, 0,7, и 0,8. Найти вероятности того, что: а) все трое попадут в кольцо; б) ; в) ровно двое попадут в кольцо; г) хотя бы один попадёт в кольцо.

*Решение.* Введём алгебру событий. ,

, .

Тогда:

а) . Поскольку события независимы, то

б) . Поскольку слагаемые в правой части этого равенства несовместны, а в каждом слагаемом сомножители независимы. То

*.*

в) . Поскольку слагаемые в правой части этого равенства несовместны, а в каждом слагаемом сомножители независимы. То

*.*

г) . Поскольку слагаемые в правой части этого равенства совместны и независимы, то (см. (7.6))

**Пример 13.2.**В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. а) Найти вероятность того, что извлечённый шар окажется белым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету). б) Извлечённый из урны шар оказался белым. Найти вероятность того, что в урне первоначально не было белого шара.

*Решение.* Введём гипотезы:

Введём событие .

Из условия задачи следует, что .

Очевидно, что ,

а) Тогда по формуле полной вероятности

=

б) По формуле Байеса

*.*

**Пример 13.3.** Найти вероятность того, что не умеющий читать ребёнок, раскладывая случайным образом (последовательно) карточки с буквами К, К, Л, Л, О, О, О, сложит слово КОЛОКОЛ.

*Решение.* На первое место будет выбрана буква К с вероятностью . На второе место будет выбрана буква О при условии, что на первое место была выбрана буква К, с вероятностью . Продолжая рассуждать дальше аналогичным образом, по формуле умножения вероятностей для зависимых событий, получим:

*.*

**Пример 13.4.** Найти вероятность того, что все четверо пассажиров, ожидающих на остановке одного и того же автобуса, войдут в одну и ту же дверь трёхдверного автобуса. Вход каждого из них во все три двери автобуса считается равновероятным.

*Решение.* Обозначим через , вход каждого из пассажиров в -тую дверь. Тогда событие описывается следующим образом:

.

Очевидно, что слагаемые в правой части этого равенства несовместны, а сомножители в каждом слагаемом независимы.

Поскольку по условию , то

.

**Пример 13.5.** Стрелок, имеющий четыре патрона, стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что будет произведено: 1) три выстрела; 2) четыре выстрела.

*Решение.* Обозначим через событие состоящее в том, что стрелок поразил мишень при *k*-том выстреле, Тогда:

1)

. Поскольку сомножители в правой части этого равенства независимы, то

2) . Поскольку сомножители в правой части этого равенства независимы, то

**14. Простейший поток событий.**

**Определение 14.1.** *Потоком событий* называется последовательность событий, которые появляются в случайные моменты времени.

Примером потоков являются: поступление звонков на АТС или в службу скорой медицинской помощи, посещения клиентами предприятий массового обслуживания.

**Определение 14.2.** Поток называется *стационарным*, если вероятность появления события раз за промежуток времени продолжительности зависит только от и и не зависит от начала отсчёта промежутка времени.

**Определение 14.3.** Поток называется обладающим *свойством отсутствия последствия*, если вероятность появления события раз за промежуток времени продолжительности не зависит от того, появлялось или не появлялось событие до начала отсчёта времени продолжительности .

**Определение 14.4.** Поток называется *ординарным*, если вероятность появления события более одного раза за очень малый промежуток времени ничтожно мала по сравнению с вероятностью появления события один раз за тот же промежуток времени.

**Определение 14.5.** Поток называется *простейшим* или *пуассоновским*, если он обладает свойствами стационарности, отсутствия последствия и ординарности.

Если – это вероятность появления события раз за промежуток времени длительности , а - среднее число появления события за единицу времени, называемое *интенсивностью потока*, то пуассоновский поток описывается формулой:

. (14.1)

**Пример 14.1.** Среднее число вызовов, поступающих в службу скорой медицинской помощи, составляет 5 за час. Найти вероятность того, что за 2 часа поступит 8 вызовов.

*Решение.* Имеем: , , . .

**СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ**

**15. Определение случайных величин.**

**Определение 15.1.** *Случайной величиной* называется числовая величина, которая в результате эксперимента принимает одно и только одно значение из некоторого множества возможных значений (какое именно, предсказать невозможно).

**Определение 15.2.** Если множество возможных значений случайной величины является дискетным, то случайная величина называется *дискретной*.

**Определение 15.3.** Если случайная величина может принимать все значения из некоторого интервала, то случайная величина называется *непрерывной.*

Случайны величины будем обозначать заглавными буквами а их значения – малыми буквами , возможно, с индексами.

**Пример 15.1.** Четыре раза бросается монета. - число выпавших «гербов». Очевидно, что является дискретной случайной величиной с возможными значениями 0, 1, 2, 3, 4.

**Пример 15.2.** Натягивается нить длины 1м до разрыва. - координата точки разрыва. Очевидно, что является непрерывной случайной величиной с возможными значениями из интервала .

**16. Дискретные случайные величины.**

**Определение 16.1** *Законом (рядом) распределения* дискретной случайной величины   
 называется таблица, в которую занесены все значения этой случайной величины и соответствующие этим значениям вероятности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

Здесь ,

Поскольку события , , попарно несовместны, а случайная величина по определению обязательно принимает одно из значений , , то

**Определение 16.2.** Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение приняла другая.

**Определение 16.3.** Если случайная величина распределена по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

, то случайными величинами и называются величины, распределённые соответственно по законам

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

и

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

**Определение 16.4.** Если случайные величины и распределены по законам

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

и

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

, то случайными величинами и называются величины, распределённые соответственно по законам

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *…* |  | *…* |  | *…* |  |
|  |  | *…* |  | *…* |  | *…* |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *…* |  | *…* |  | *…* |  |
|  |  | *…* |  | *…* |  | *…* |  |

*,* где   
.

Покажем, что

(16.1)

Действительно, . Поскольку события попарно несовместны, то

, то есть справедливо первое из равенств (16.1). ( Второе из равенств (16.1) доказывается аналогично). Тогда

=

Заметим, что если - независимые случайные величины, то . Действительно, . Поскольку по определению независимых случайных величин события

независимы, то по формуле умножения вероятностей для независимых событий получим: , то есть .

**Определение 16.5.** Если случайная величина распределена по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

и – некоторая функция, то случайной величиной называется величина, распределённая по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

Заметим при этом, что если для различных значений функция принимает равные значения, то в законе распределения это значение нужно записать один раз. А соответствующие вероятности сложить.

**17. Числовые характеристики дискретной случайной величины.**

**Определение 17.1.** *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины   
 распределённой по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |

, называется число

Математическое ожидание – это среднее значение случайной величины.

Приведём свойства математического ожидания.

Под здесь и ниже подразумевается случайная величина, которая принимает одно значение с вероятностью 1. Доказательство очевидно.

1. где здесь и ниже является константой.

Доказательство очевидным образом следует из определений случайной величины и математического ожидания.

*Доказательство.* Пусть случайные величины распределены по законам из определения 16.4. Тогда

**Следствие 17.1.** Свойство 3) справедливо для суммы любого числа случайных величин.

1. Если случайные величины независимы, то

*Доказательство.* Пусть случайные величины распределены по законам из определения 16.4. Тогда

**Следствие 17.2.** Свойство 4) справедливо для произведения любого числа взаимно независимых случайных величин.

Как было сказано, математическое ожидание является средним значением случайной величины. Другой важной числовой характеристикой случайной величины является *дисперсия*, характеризующая разброс значений случайной величины.

**Определение 17.2.** *Дисперсией* случайной величины называется число

,

то есть дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклоненияслучайной величины от своего математического ожидания.

Очевидно,

Справедлива следующая

**Теорема 17.1.**

. (17.1)

*Доказательство.* Используя свойства математического ожидания, получим:

Часто дисперсию бывает удобно считать по формуле (17.1).

Приведём свойства дисперсии.

*Доказательство.*

1. .

*Доказательство.*

=

1. Если случайные величины независимы, то

*Доказательство.*

.

Здесь было использовано, что если случайные величины независимы, то

=.

**Следствие 17.3.** Свойство 3) справедливо для суммы любого числа взаимно независимых случайных величин.

1. Если случайные величины независимы, то

*Доказательство.*

+

1. .

*Доказательство.* Поскольку независимы, то

=

**Определение 17.3.** *Средним квадратическим отклонением* случайной величины называется число .

**18. Биномиальный закон распределения.**

Пусть проводится независимых испытаний, и при каждом испытании вероятность появления события одна и та же и равна (схема Бернулли). Пусть – случайная величина, число появления события при испытаниях. Её закон распределения называется *биномиальным законом*, или *законом Бернулли.*

Нетрудно понять, что этот закон имеет следующий вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | … |  |
|  |  |  | … |  |

, где вероятности вычисляются по формуле Бернулли, а именно,

По формуле бинома Ньютона получим:

.

**Теорема 18.1.** Для биномиального закона распределения

*Доказательство.* Введём случайные величины , число появления события при -том испытании. Очевидно, все они распределены по одному закону, который имеет вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |
|  |  |  |

Тогда ,

Нетрудно понять, что . Тогда по следствиям 17.1 и 17.3

Нетрудно понять, что то, что для биномиального закона , вполне предсказуемо. Действительно, если, например, 12 раз бросается игральная кость. И - число выпавших «пятёрок», то здравый смысл подсказывает, что наиболее ожидаемо, что «пятёрки» выпадут в шестой доле случаев, то есть два раза:

Рассмотрим пример (см.пример 15.1).

**Пример 18.1.** Четыре раза бросается монета. - число выпавших «гербов». Найти закон распределения случайной величины и её математическое ожидание и дисперсию.

*Решение.* Это – биномиальный закон распределения с вероятностью появления события при каждом испытании и

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |

.

=, ,

. Таким образом, закон распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |

Проверка:

Поскольку закон распределения является биномиальным, то

**19. Закон Пуассона.**

При очень большом числе испытаний и ничтожно малой вероятности появления события при каждом испытании биномиальный закон распределения числа появления события превращается в *закон Пуассона*:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | … |  | … |
|  |  |  | … |  | … |

,   
, где

Покажем, что =1. Действительно,

=1,

поскольку ряд является рядом Тейлора функции

**Теорема 19.1.** Для закона Пуассона, .

*Доказательство.* Имеем:

=

Заметим, что то, что , согласуется с тем, что для биномиального закона

Для вычисления дисперсии вычислим сначала . Имеем:

*=*

Здесь мы использовали полученное при выводе формулы для математического ожидания равенство

Тогда =.

Заметим, что то, что , тоже согласуется с тем, что для биномиального закона

Действительно, Поскольку в законе Пуассона вероятность предполагается ничтожно малой, то, устремив к нулю, получим, что .

**20. Геометрический закон распределения.**

Пусть проводится серия независимых испытаний до первого появления события , причём при каждом испытании вероятность появления события одна и та же и равна . Пусть – число испытаний до первого появления события. Тогда закон распределения этой случайной величины называется *геометрическим законом распределения.* Этот закон имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | … |  | … |
|  |  |  |  | … |  | … |

, где . Действительно, обозначим через появление события при - том испытании. Тогда

. Очевидно, что .

Эти вероятности представляют собой геометрическую прогрессию. Поэтому

**Теорема 20.1.** Для геометрического распределения ,

*Доказательство.* Имеем:

(20.1)

Продифференцировав обе части равенства

, (20.2)

Получим:

. (20.3)

Тогда из (20.1) и (20.3) получим:

.

Для получения формулы дисперсии вычислим сначала

(20.4)

Умножим обе части равенства (20.3) на :

.

Продифференцировав обе части последнего равенства, получим:

. (20.5)

Из (20.4) и (20.5) получим:

=.

Тогда

=.

Формула для математического ожидания предсказуема, как и для биномиального закона распределения. Действительно, если, например, бросается игральная кость до первого появления «пятёрки», то в среднем понадобится шесть попыток:

**21. Гипергеометрический закон распределения.**

С ещё одним законом распределения - гипергеометрическим - ознакомимся на примере.

**Пример 21.1.** В урне находятся 5 белых шаров и 2 чёрных. *X* – случайная величина, число белых шаров среди четырёх отобранных. Составить её закон распределения и найти математическое ожидание и дисперсию. (Такой закон распределения называется *гипергеометрическим*).

*Решение.* Очевидно, *X*может принимать значения 2, 3, 4. Следовательно, закон распределения имеет вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 2 | 3 | 4 |
| *P* |  |  |  |

Вычислим вероятности. Во всех трёх случаях общее число исходов одно и то же и равно , поскольку выбирается 4 шара из 7.

Число благоприятствующих исходов, соответствующих случаю равно (см. задачи про пирожки):

Тогда .

Аналогичным образом для ,

Для получим: , .

Таким образом, закон распределения следующий:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 2 | 3 | 4 |
| *P* |  |  |  |

Проверка:

Вычислим математическое ожидание:

*.*

Для вычисления дисперсии сначала вычислим .

.

Тогда для дисперсии имеем:

=.

**22. Функция распределения вероятностей случайной величины.**

**Определение 22.1.** *Функцией распределения вероятностей случайной величины* (дискретной и непрерывной) называется функция

то есть функция, равная вероятности того, что приняла значение, меньшее

Из определения 22.1 очевидным образом вытекают свойства функции распределения:

1)

(неубывающая);

3) , ;

4) ( непрерывна слева).

*Доказательство.*1).

2) если , то очевидно, что .

3)

*.*

4) Следует из определения функции

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал вычисляется по формуле

(22.1)

Действительно, поскольку { и события

несовместны, то (22.1).

Пусть дискретная случайная величина распределена по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ……… |  |
|  |  |  | ……… |  |

Построим её функцию распределения. Нетрудно понять, что:

**Пример 22.1.** Построить функцию распределения случайной величины распределенной по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,3 |

*Решение.* Согласно определению функции распределения получим:

***Задача для самостоятельного решения.***

Построить функцию распределения случайной величины распределенной по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 4 | 5 |
|  | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |

**23.1. Непрерывные случайные величины.**

**Определение 23.1.** Случайная величина *X* называется непрерывной, если её функция распределения непрерывна.

Вероятность попадания в заданный интервал вычисляется по формуле:

(23.1)

**Определение 23.2.** Пусть*X –* непрерывная случайная величина, и её функция распределения , к тому же, кусочно-дифференцируема.

Тогда плотностью распределения вероятности этой случайной величины называется функция

***Вероятностный смысл плотности вероятности****.*

Плотность вероятности – это вероятность, приходящаяся на единицу длины.

Действительно, по формуле Ньютона – Лейбница и теореме о среднем получим:

,

где - некоторая точка между точками и (. Но тогда

.

***Свойства плотности вероятности****:*

1)

(нормировочное условие). (23.2)

Свойство 1) следует из того, что поскольку функция является неубывающей, то

Если задана плотность вероятности , то функция распределения вероятности находится по формуле:

(23.3)

Действительно,

.

Если в последнем равенстве устремить к , то в силу свойства 3) функции получим (23.3).

Вероятность попадания в заданный интервал вычисляется по формуле:

(23.4)

Действительно, (см. (23.1).

Если в последнем равенстве устремить к , а к , то в силу свойств 3) функции получим нормировочное условие 2).

Заметим, что справедливость нормировочного условия можно объяснить и из тех соображений, что плотность вероятности – это вероятность, приходящаяся на единицу площади, а интеграл - это вся вероятность, распределённая по всей числовой оси, а вся вероятность равна единице. Нормировочное условие – это аналог того, что для дискретной случайной величины сумма вероятностей всех возможных значений равна единице.

**Определение 23.3.** Математическим ожиданием непрерывной случайной величины *X* называется

, (23.5)

если этот интеграл сходится.

Соответственно

.

**Определение 23.4**. Дисперсией непрерывной случайной величины *X* называется

.

Для непрерывной случайной величины, также как для дискретной, справедлива

**Теорема 23.1.**

(23.6)

**Пример 23.1.** Пусть

Найти: .

*Решение.* Константу *c* найдём из нормировочного условия (23.2).

*.*

Найдём по формуле (23.3).

1) Пусть Тогда

2) Пусть Тогда .

3) Пусть Тогда =1.

Получили:

В конце следует проверить, является ли полученная функция непрерывной, то есть функция равняется ли нулю при , и единице – при Это выполнено.

Вычислим математическое ожидание.

.

Вычислим

=5.

Вычислим дисперсию по формуле (3.6).

.

По формуле (3.1) получим:

*.*

**24.Равномерное распределение.**

**Определение 24.1.** Случайная величина называется *равномерно* распределённой на интервале , если она задается плотностью распределения

Из нормировочного условия следует, что , что понятно и из того, что плотность вероятности – это вероятность, приходящаяся на единицу длины. Поскольку вся вероятность равна единице и распределена равномерно на интервале , то на единицу длины придётся Обратим внимание на то, что это имеет место только для равномерного распределения! В задачах, подобных рассмотренной в примере 23.1, константа так не вычисляется!

Применив формулу , для равномерного распределения получим:

Вычислив математическое ожидание по формуле

,

получим: . Это тоже предсказуемо, поскольку математическое ожидание – это среднее значение случайной величины, а при равномерном распределении средним знамением оказывается середина интервала.

Можно доказать, что дисперсия при равномерном распределении вычисляется по формуле .

***Задача для самостоятельного решения.***

**Пример 24.1.** Случайная величина распределена равномерно на интервале Найти ,

**25.Нормальное распределение.**

**Определение 25.1.** Случайная величина называется *нормально* распределённой, если она задается плотностью распределения

, (25.1)

где и - константы, причём

Оказывается, что , , то есть - это математическое ожидание, а - среднее квадратическое отклонение.

Докажем прежде всего справедливость выполнения нормировочного условия. Имеем:

(интеграл Пуассона).

Докажем теперь, что Имеем:

Первый из интегралов в правой части последнего равенства равен нулю в силу нечётности подынтегральной функции, а второй равен , умноженному на интеграл Пуассона, то есть равен .

То, что , можно объяснить и тем, что кривая (Гаусса), описываемая уравнением

, симметрична относительно вертикальной прямой , а математическое ожидание – это среднее значение случайной величины.

Технически несколько сложнее доказательство того, что . Имеем:

.

Здесь мы воспользовались подведением под знак дифференциала, формулой интегрирования по частям, равенством единице интеграла Пуассона и тем, что с помощью правила Лопиталя можно доказать, что

Можно показать, что при нормальном распределении

, (25.2)

где – интегральная функция Лапласа.

Действительно,

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал при нормальном распределении вычисляется по формуле:

. (25.3)

Из (25.3) легко получить, что вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на некоторую величину вычисляется по формуле:

. (25.4)

Следует отметить, что нормальное распределение играет важную роль на практике, поскольку сумма большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, имеет распределение, близкое к нормальному.

Сформулируем это в виде теоремы.

**Теорема 25.1(Центральная предельная теорема Ляпунова).** Пусть

последовательность независимых случайных величин. Пусть .

Введём обозначения: , ,

, . Пусть

. (25.5)

Тогда

.

Смысл условия Ляпунова (25.5) заключается в том, что влияние каждой из случайных величин на всю сумму ничтожно мало.

***Задачи для самостоятельного решения.***

**Пример 25.1.** Случайная величина *X* распределена нормально с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением соответственно равными 6 и 2. Найти вероятность попадания этой величины в интервал .

**Пример 25.2.** Случайная величина *X* распределена нормально со средним квадратическим отклонением равным 0,4.Найти вероятность того, что отклонение этой величины от своего математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

**26. Двумерная случайная величина.**

**Определение 26.1.** *Двумерной случайной величиной* называется упорядоченная пара случайных величин .

Если -дискретные случайные величины, то называется дискретной двумерной величиной.

Если - непрерывные случайные величины, то называется непрерывной двумерной величиной.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называется таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *…* |  |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |
| … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  |

,в которой - значения случайной величины , - значения случайной величины , Очевидно, что .

Математическое ожидание произведения вычисляется по формуле

.

Зная закон распределения двумерной случайной величины , можно найти законы распределения её составляющих .

А именно,

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

,где , .

Последние два равенства доказываются ровно так же, как равенства (16.1)

**26.2. Условные законы распределения.**

**Определение 26.2.** *Условным законом распределения* случайной величины называется закон её распределения при условии, что известно, что случайная величина приняла значение .

Нетрудно доказать, что условный закон имеет следующий вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ……… |  |
| *P*(*X* |  |  | ……… |  |

,где , то есть каждый элемент -той строки закона совместного распределения делится на сумму всех элементов этой строки.

Аналогичным образом определяется условный закон для составляющей Очевидно, что он имеет следующий вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ……… |  |
| *P*(*Y* |  |  | ……… |  |

,где , то есть каждый элемент -того столбца закона совместного распределения делится на сумму всех элементов этого столбца.

Приведённые выше утверждения следуют из формулы условной вероятности:

*.*

Условные математические ожидания

*M*(*X*, *P*(*Y*

называются *функциями регрессии* одной из случайных величин на другой.

**27. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.**

**Определение 27.1.** *Корреляционным моментом* случайных величин называется число .

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 27.1.** .

**Теорема 27.2.** Если независимы, то

Доказательства теорем 27.1 и 27.2 просты и следуют из свойств математического ожидания.

**Замечание 27.1.** Из того, что не следует что независимы (см. ниже пример 31.2).

Но из теоремы 27.2 очевидным образом вытекает следующее

**Следствие 27.1.** Если , то зависимы.

**Определение 27.3.** *Коэффициентом корреляции* случайных величин называется число

,

где - средние квадратические отклонения случайных величин соответственно.

Справедлива следующая

**Теорема 27.3.** .

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случайную величину . Вычислим её дисперсию . Выполнив простые, хотя и громоздкие преобразования, получим: . Поскольку , то .

Вычислив дисперсию случайной величины , аналогичным образом получим неравенство . Следовательно,

***Задача для самостоятельного решения.***

Пусть двумерная случайная величина распределена по следующему закону:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| -1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |
| 1 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

Найти:

законы распределения

условные законы случайной величины при условии и случайной величины при условии ;

вычислить коэффициент корреляции

**28.Функция распределения вероятностей двумерной случайной величины.**

**Определение 28.1.** Функцией распределения двумерной случайной величины (*X,Y)* называется функция *F(x,y)=P(X<x,Y<y).*

***Свойства функции распределения:***

1) *F(x,y)*

2)  *F(,y)*,  *F(x,)*;

3) ;

4)

;

5)

6),

(непрерывность слева по обеим переменным)

***Вероятность попадания случайной величины (X,Y)******в прямоугольник*.**

.

Если случайная величина дискретна, то функция является кусочно-постоянной. Если случайная величина непрерывна.

**29. Непрерывная двумерная случайная величина. Плотность вероятности.**

**Определение 29.1.** Пусть функция распределения вероятностей

случайной величины (*X,Y)* непрерывна и кусочно-дифференцируема. Тогда *плотностью распределения вероятности* этой случайной величины называется функция

.

***Вероятностный смысл плотности вероятности.***

Плотность вероятности равна вероятности, приходящейся на единицу площади.

***Свойства плотности вероятности:***

1)

2) (нормировочное условие).

Вероятность попадания случайной величины (*X,Y)* в произвольную область *D* при заданной плотности вычисляется по формуле:

При заданной плотности функция распределения вероятностей

находится по формуле:

.

Функции распределения и плотности составляющих *X* и *Y* находятся по формулам:

, ,

Справедлива следующая

**Теорема 29.1.** Случайные величиныи независимы тогда и только тогда, когда

где

*Доказательство.* Справедливость теоремы вытекает из определений функций и формулы умножения вероятностей для независимых событий: .

Действительно,

и независимы

Из теоремы 29.1 нетрудно получить

**Следствие 29.1.** Случайные величиныи независимы тогда и только тогда, когда

*Доказательство.*1) и независимы

2)

и независимы .

Математические ожидания вычисляются по формулам:

Дисперсии и средние квадратические отклонения вычисляются по формулам:

, , .

Напомним формулы для вычисления корреляционного момента и коэффициента корреляции:

, .

**30. Условные плотности и условные математические ожидания.**

**Определение 30.1.** Условной плотностью случайной величины *X* называется плотность распределения её вероятности при условии, что известно, что случайная величина *Y* приняла какое-то значение *Y=y.*

Обозначим эту плотность . Аналогичным образом определяется условная плотность .

Нетрудно доказать, что

, =.

Условные математические ожидания

= и M

называются *функциями регрессии* одной из случайных величин на другой.

**31. Равномерное распределение на плоскости.**

**Определение 31.1.** Случайная величина называется равномерно распределенной в области *D*, если она задается плотностью

Из нормировочного условия следует, что при равномерном распределении константа , где - площадь области *D.*

**Пример 31.1.** Случайная величина распределена равномерно в треугольнике с вершинами (Вычислить коэффициент корреляции. Найти условную плотность и условное математическое ожидание

*Решение.* Поскольку площадь треугольника равна , то константа

Уравнение прямой, проходящей через точки и имеет вид:

Тогда:

;

из соображений симметрии понятно, что ;

;

из соображений симметрии понятно, что ;

тогда ;

=, .

. .

Найдём теперь и

Очевидно, что . Напомним, что

Тогда

При условии имеем:

Откуда следует:

Заметим, что это - равномерное распределение по при каждом y.

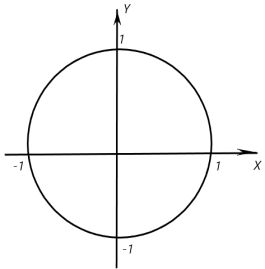
Тогда

*=.*

Заметим, что получилась середина интервала как и должно быть при равномерном распределении.

**Пример 31.2.** Случайная величина распределена равномерно в круге , описываемым неравенством Вычислить корреляционный момент, найти плотности составляющих и и а также выяснить, являются ли случайные величины и независимыми.

*Решение.*

**

Поскольку площадь круга радиуса 1 равна , то плотность внутри круга и равна 0 вне круга.

Поскольку круг симметричен относительно обеих координатных осей, то

в силу нечётности подынтегральных функций во всех трёх интегралах. Но тогда

Напомним, что

Тогда , если и , если .

В силу симметрии

Очевидно, что , следовательно, по следствию 29.1 случайные величины и зависимы, хотя

***Задача для самостоятельного решения.***

**Пример 31.2.** Случайная величина распределена равномерно в треугольнике с вершинами (Вычислить коэффициент корреляции. Найти условную плотность и условное математическое ожидание

***Контрольная работа.***

Случайная величина распределена равномерно в треугольнике с вершинами (Вычислить коэффициент корреляции. Найти условную плотность и условное математическое ожидание*n -* номер студента по журналу.

**32. Нормальный закон распределения на плоскости.**

**Определение 32.1.** Двумерная случайная величина (*X*,*Y*) называется распределённой по *нормальному закону*, если она задаётся плотностью распределения

, (32.1)

где и - произвольные параметры, >0,>0, .

Можно проверить, что для функции (32.1) справедливо нормировочное условие.

Оказывается, что и - математические ожидания соответственно случайных величин *X* и *Y*, - их средние квадратические отклонения, а - их коэффициент корреляции.

Заметим, что если то

*.*

То есть по следствию 29.1 случайные величины *X* и *Y* в этом случае являются независимыми.

**33.Линейная среднеквадратическая регрессия.**

Пусть *X* и *Y -* зависимые случайные величины, причём характер зависимости *Y=g* сложный или неизвестен. Тогда функцию *g*заменяют линейной функцией *Y*= , которая в каком-то смысле наилучшим образом приближает функцию *g*. А именно, коэффициенты выбираются таким образом, чтобы функция

принимала наименьшее значение.

Распишем функцию

где для краткости употребляются обозначения

Вычислим частные производные функции :

Значения параметров , при которых достигается наименьшее значение функции , вычислим из системы

Тогда, поскольку , , , получим:

, ,

где и - математические ожидания случайных величин *X* и *Y*, и - средние квадратические отклонения случайных величин *X* и *Y*, а *r -* коэффициент корреляции.

Функция

(33.1)

называется линейной среднеквадратической регрессией случайной величины *Y* на случайной величине *X*, а её график - линией среднеквадратической регрессии случайной величины *Y* на случайной величине .

Уравнение (33.1) удобнее записывать в виде

. (33.2)

Очевидно, что уравнение линейной среднеквадратической регрессии случайной величины *X* на случайной величине *Y* имеет вид:

(33.3)

Обе линии регрессии проходят через точку (, называемой центром регрессии. При *r=*эти прямые совпадают*.*

Подставив найденные значения в нетрудно получить, что

.

Эта величина называется *остаточной дисперсией* случайной величины относительно случайной величины

Очевидно, что при *r=*минимум функции равен нулю. Это означает, что в этом случае случайные величины *X* и *Y* связаны линейной зависимостью.

***Задача для самостоятельного решения.***

Двумерная случайная величина распределена по закону:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| \*X*  *Y* |  |  |  |  |  |
|  | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,03 | 0,01 |
|  | 0,04 | 0,02 | 0,06 | 0,02 | 0,06 |
|  | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 |
|  | 0,04 | 0,06 | 0,05 | 0,03 | 0,02 |
|  | 0,06 | 0,03 | 0,03 | 0,07 | 0,1 |

Найти уравнение линейной среднеквадратической регрессии случайной величины *Y*на случайной величине *X*и построить её график.

**33. Закон больших чисел.**

Оказывается, что сумма очень большого числа случайных величин при некоторых (достаточно широких) условиях ведёт себя как не случайная, а закономерная величина. Теоремы, утверждающие подобные результаты, объединяются под общим названием закона больших чисел. Здесь будут приведены две из таких теорем: теорема Чебышева и теорема Бернулли.

**Лемма 33.1.** Пусть случайная величина распределена по закону

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

, тогда для любого справедливо неравенство

*.* (33.1)

Очевидно, события и являются взаимно противоположными. Поэтому , откуда

. (33.2)

Оценим сверху величину . Для дисперсии имеем:

.

Опустим в правой части этого равенства те слагаемые, для которых (заметим, что при этом ). Тогда получим:

*,*

Откуда получим:.

Из последнего неравенства и равенства (33.2) получим неравенство (33.1).

**Теорема 33.1 (Чебышев).** Пусть - попарно независимые случайные величины, причём . Тогда для любого

*Доказательство.* Для краткости введём обозначение . Очевидно, в силу свойств математического ожидания

.

Для случайной величины запишем неравенство Чебышева (33.1):

. (33.3)

В силу свойств дисперсии и условия теоремы получим:

*.*

Воспользовавшись этой оценкой, а также тем, что из (33.3) получим:

1.

Устремив в последнем неравенстве к бесконечности, получим утверждение теоремы.

Из теоремы Чебышева в качестве следствия получим теорему Бернулли. Заметим, что теорема Бернулли была доказана гораздо раньше теоремы Чебышева.

**Теорема 33.2 (Бернулли).** Пусть проводится независимых испытаний и вероятность появления события в каждом испытании равна . Пусть при этом событие наблюдается раз. Тогда при любом для относительной частоты справедливо утверждение:

*.*

*Доказательство.* Пусть , ,…- случайные величины, числа появления события при каждом испытании. Очевидно, что каждая из этих случайных величин может принимать значение 0 с вероятностью и значение 1 с вероятностью (см. доказательство теоремы 18.1). Причём , . Тогда

. Нетрудно понять, что . Тогда. Применив теорему Чебышева к последовательности случайных величин ...,, получим

**ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

**1.Статистический ряд распределения.**

**Числовые характеристики количественного признака.**

Пусть имеется некоторая совокупность объектов объёма *N* (число объектов).

Пусть изучается некоторый количественный признак *X* (длина, вес, возраст..) объектов этой совокупности.

Пусть значения признака *X* встречаются раз,

Числа называются частотами, соответствующими значениям .

Очевидно,

Как правило, объём всей совокупности, называемой генеральной совокупностью, бывает очень большим, и по этой причине её исследование бывает затруднительным, а то и невозможным. По этой причине осуществляют выборку объектов меньшего объема и изучают эту выборочную совокупность.

Математическая статистика обосновывает, насколько и в каком смысле результаты исследования выборочной совокупности можно относить ко всей генеральной совокупности.

Все сказанное ниже можно относить как к генеральной, так и к выборочной совокупности.

Следующая таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* |  |  | ... |  |
| *n* |  |  | ... |  |

называется статистическим рядом распределения частот.

Числа называются относительными частотами, а таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* |  |  | ... |  |
| *w* |  |  | ... |  |

называется статистическим рядом распределения относительных частот.

Очевидно,

Напомним, что относительная частота называется статистической вероятностью, и в каком-то смысле она приближает истинную вероятность (теорема Бернулли).

Статистический закон распределения относительных частот является аналогом закона распределения дискретной случайной величины.

Средним значением признака *X* называется число

=,

которое является аналогом математического ожидания дискретной случайной величины.

Дисперсией называется число

==

Справедлива

**Теорема 1.** , где =.

**2. Эмпирическая функция распределения.**

Эмпирической функцией распределения количественного признак *X* называется функция

.

Если предполагать, что среди значений выборки могут быть равные, а частота каждого из значений равна единице, то эмпирическую функцию распределения можно представить в виде:

Суммирование производится по тем , для которых .

Эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами функции распределения дискретной случайной величины.

**3. Полигон и гистограмма.**

Если на плоскости с декартовыми координатами *X* и *Y* откладывать точки с координатами , а затем соединить их отрезками прямой, то полученная ломанная называется *полигоном частот*.

Если частоты заменить на относительные частоты, то полученная ломанная соответственно называется *полигономотносительных частот*.

Если значения признака расположены очень густо, то строят так называемую гистограмму. Для этого весь интервал, в котором расположены все наблюдаемые значения признака, разбивают на равные частичные интервалы длины *h* и вычисляют для каждого частичного интервала сумму частот попавших в -тый интервал. По ординате для всех значений *x* из -того интервала откладывают значение (плотность частот). Полученная ступенчатая фигура называется *гистограммой частот*. Очевидно, что площадь полученной фигуры равна объёму совокупности.

Аналогичным образом, откладывая по ординате значение для *x* из *i*-того интервала, строят *гистограмму относительных частот*. Площадь гистограммы относительных частот равна единице.

**4. Точечные оценки.**

Выше было сказано, что по результатам исследования выборочной совокупности делаются выводы о всей генеральной совокупности.

Предположим, оценивается некоторый параметр генеральной совокупности, скажем среднее значение, по соответствующему параметру выборочной совокупности. осуществляя различные выборки, мы будем получать, вообще говоря, различные значения этого параметра. Чтобы оценка была корректной, она должна удовлетворять определенным критериям. Одним из этих критериев является *несмещенность* оценки.

Оценка некоторого параметра называется *несмещенной*, если её математическое ожидание (по различным выборкам) равно значению этого параметра всей генеральной совокупности.

Можно доказать, что среднее значение является несмещенной оценкой.

А вот дисперсия является смещенной оценкой. Если - дисперсия генеральной совокупности, - дисперсия выборочной совокупности, а *n* - объем выборки, то

=.

Поэтому вводят так называемую *исправленную дисперсию*

.

Очевидно, что исправленная дисперсия является несмещенной оценкой.

Оценки, которые определяются одним числом, называются *точечными*.

Приведенные выше оценки являются точечными.

***Задача для самостоятельного решения.***

Пусть статистический ряд выборочной совокупности имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -k | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *n* | 2 | 4 | 7 | 5 | 2 |

где k - номер студента по журналу.

Найти эмпирическую функцию распределения и исправленную дисперсию.

**5. Интервальные оценки.**

Недостатком точечной оценки является то, что для каждой конкретной выборки, даже если она несмещённая, значение полученного параметра может существенно отличаться от его значения для генеральной совокупности.

Оценка, задающаяся двумя числами - концами интервала, в который с некоторой вероятностью попадает оцениваемый параметр, называется *интервальной оценкой*.

Объясним подробнее. Пусть - значение оцениваемого параметра генеральной совокупности, а - значение оценки этого параметра, полученного по выборке.

Предположим, что удалось доказать, что вероятность того, что с некоторой достаточно большой вероятностью , называемой *доверительной вероятностью*, попадает в интервал , то есть =. Тогда этот интервал называется *доверительным интервалом*.

**6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении**

Пусть из некоторых соображений известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с известным параметром и нужно найти по среднему значению выборки объёма *n* доверительный интервал c доверительной вероятностью для математического ожидания *a.*

Оказывается, что границы интервала определяются из формулы

=

Поясним: из равенства по таблице интегральной функции Лапласа определяется значение *t*, после чего вычисляются границы интервала и

***Задача для самостоятельного решения.***

Пусть генеральная совокупность распределена по нормальному закону с известным параметром Пусть объем выборки Найти доверительный интервал математического ожидания *a* с доверительной вероятностью =0,95, если среднее выборочное , где - номер студента по журналу.

**7. Проверка статистических гипотез. Критерий Колмогорова.**

Пусть имеется некоторая выборка случайной величины , закон распределения которой неизвестен. И по выборке мы хотим выяснить, совпадает ли функция распределения случайной величины с некоторой предполагаемой функцией распределения . В таком случае говорят о проверке *статистической гипотезы согласия.*

По наблюдениям выборки следует либо принять решение о совпадении функции распределения с функцией распределения , либо отвергнуть эту гипотезу.

Обозначим через гипотезу о том, что , а через - противоположную (конкурирующую) гипотезу о том, что хотя бы при одном значении

Поскольку наблюдения выборки случайны, то нужно осознавать, что можно ошибочно отвергнуть верную гипотезу или, наоборот, принять неверную гипотезу. Первая из этих двух ошибок называется *ошибкой первого рода*. А вторая – *ошибкой второго рода*.

Для определённости будем предполагать, что верна гипотеза

Тогда вероятность отвергнуть верную гипотезу называется вероятностью ошибки первого рода.

Вероятность принять неверную гипотезу называется вероятностью ошибки второго рода.

Правила, по которым принимаются решения о справедливости гипотез, называются критериями согласия или просто критериями.

Мы здесь остановимся на критерии Колмогорова.

Построим эмпирическую функцию распределения по наблюдаемой выборке

объёма :

*.*

Нам понадобятся две теоремы.

**Теорема 7.1. (Гливенко).** Если- эмпирическая функция распределения выборки , а - истинная функция распределения непрерывной случайной величины , то

**Теорема 7.2. (Колмогоров).** Пусть

(функция Колмогорова). Пусть - эмпирическая функция распределения случайной выборки объёма непрерывной случайной величины с функцией распределения .Тогда для любого имеет место равенство

Смысл теоремы Колмогорова состоит в том, что при больших случайная величина

имеет функцию распределения, приблизительно равную функции Колмогорова . Поэтому для произвольно малого числа можно выбрать число такое, что Из этого следует, что неравенство

выполняется с вероятностью, близкой к

Положим

.

Согласно сказанному выше, функция является хорошей оценкой истинной функции распределения . Поэтому величина является мерой различия между истинной функцией распределения и предполагаемой функцией распределения Функция называется *статистикой Колмогорова*. По теореме Колмогорова, если

то

По таблице значений функции Колмогорова для достаточно малого числа можно найти такое значение , что

Критерием Колмогорова называется следующее правило: если , то принимается гипотеза , то есть считается, что Если же , то принимается гипотеза , то есть считается, что . При таком правиле вероятность отвергнуть верную гипотезу равна

=

Пусть теперь верна гипотеза , то есть Тогда, поскольку по теореме 1 при стремится к равномерно, то

Из этого следует, что

.

И, следовательно, для любой константы

Положими введём обозначение Тогда

Но при число –это вероятность принять гипотезу при условии, что верна гипотеза , то есть вероятность ошибки второго рода. При увеличении объёма выборки эта вероятность становится сколь угодно малой при выбранном .